

Министерство сельского хозяйства российской федерации  
Федеральное государственное бюджетное  
образовательное учреждение  
высшего профессионального образования (ФГБОУ ВПО)  
**КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

**Факультет прикладной информатики**  
*Кафедра компьютерных технологий и систем*

***Курсовые работы***  
***по дискретной математике***  
*для бакалавров факультета «Прикладная информатика»*

**Краснодар 2013**

## Примерные темы курсовых работ

1. Логика предикатов и ее приложения.
2. Перестановки и сочетания с повторениями в комбинаторике.
3. Неупорядоченные разбиения в комбинаторике. Формула для вычисления их количества.
4. Упорядоченные разбиения в комбинаторике. Формула для вычисления их количества.
5. Инверсии и перестановки в комбинаторике их применение.
6. Таблицы инверсий.
7. Плоские графы и их применения. Теорема Эйлера о соотношении чисел граней, ребер и вершин плоского графа.
8. Основы теории Гамильтоновых графов.
9. Условие Дирака существования в графе гамильтоновых циклов.
10. Условие Оре существования в графе гамильтоновых циклов.
11. Условие Поша существования в графе гамильтоновых циклов.
12. Основы теории Эйлеровых графов.
13. Условия существования в графе эйлеровых циклов.
14. Задача раскраски графов и ее приложения.
15. Числа Фибоначчи.
16. Кратчайшие пути во взвешенном графе. Алгоритм Форда построения кратчайших маршрутов.
17. Компоненты связности в графах.
18. Определение остова в графе. Алгоритм Краскала поиска остова минимального веса во взвешенном графе.
19. Понятие сети и потока в сети. Определение стационарного потока.
20. Алгоритм Форда-Фалкерсона поиска максимального стационарного потока.
21. Сети Петри.

## Задачи для курсовых работ

### Тема 1. Элементы логики предикатов

**1.1.5. Изобразите геометрически множество истинности двуместного предиката  $A(x, y)$ .**

0)  $A(x, y) = "1/3x > 9y"$ ,  
если  $x, y \in (-2, 13]$ ;

2)  $A(x, y) = "-1/4x \leq 2y"$ ,  
если  $x, y \in [-4, 9]$ ;

4)  $A(x, y) = "5x > 1/2y"$ ,  
если  $x, y \in [-12, 3]$ ;

5)  $A(x, y) = "-1/10x \leq 5y"$ ,  
если  $x, y \in (-1, 15]$ ;

6)  $A(x, y) = "3x \leq 5/3y"$ ,  
если  $x, y \in [-9, 4]$ ;

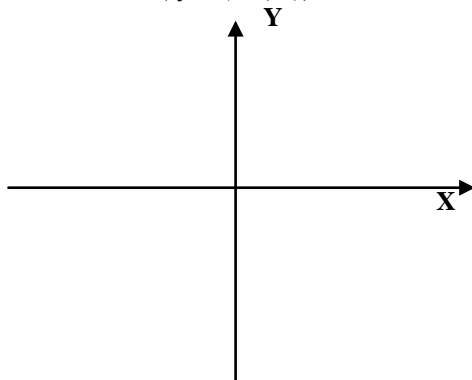
7)  $A(x, y) = "-3x < 2y"$ ,  
если  $x, y \in [-10, 5]$ ;

8)  $A(x, y) = "1/6x > -12y"$ ,  
если  $x, y \in [-1, 14]$ ;

9)  $A(x, y) = "-4x \leq 2/3y"$ ,  
если  $x, y \in [-8, 6]$ ;

1)  $A(x, y) = "3x > -1/2y"$ ,  
если  $x, y \in (-5, 11]$ ;

3)  $A(x, y) = "10x \leq 1/2y"$ ,  
если  $x, y \in (-10, 5]$ ;



**1.1.6. Изобразите геометрически множество истинности двуместного предиката  $Q(x, y)$ .**

0)  $Q(x, y) = "1/4x^2 < 2y"$ , если  $x, y \in (-1, 6]$ ;

1)  $Q(x, y) = "-4x^2 < 2y"$ , если  $x, y \in (-4, 8]$ ;

2)  $Q(x, y) = "-6x^2 \leq 3y"$ , если  $x, y \in [-2, 7]$ ;

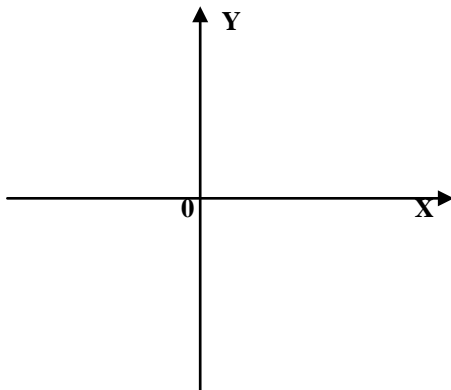
3)  $Q(x, y) = "-5x^2 \leq 2y"$ , если  $x, y \in [-3, 7]$ ;

4)  $Q(x, y) = "3x^2 < -2y"$ , если  $x, y \in (-2, 6]$ ;

5)  $Q(x, y) = "-6x^2 > 3y"$ , если  $x, y \in (-4, 5]$ ;

6)  $Q(x, y) = "7x^2 \leq -3y"$ , если  $x, y \in [-4, 5]$ ;

7)  $Q(x, y) = "-4x > 1/2y"$ , если  $x, y \in (-7, 1]$ ;



8)  $Q(x, y) = "6x^2 > -5y"$ , если  $x, y \in [-3, 4]$ ;

9)  $Q(x, y) = "8x^2 \leq 1/6y"$ , если  $x, y \in [-3, 8]$ ;

## 1.2. Операции над предикатами и кванторами

**1.2.4. Предикат  $K(x, y)$  определен на множествах:  $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$ ,  $Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$  и задан таблично. С помощью кванторов постройте одноместные предикаты и высказывания и определите их истинность:**

0)

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_2$	И	И	И	И	Л	И	Л	И	И	И
$a_3$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_4$	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_5$	Л	И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
$a_6$	Л	И	И	Л	Л	И	Л	И	Л	И

1)

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_2$	И	И	Л	И	Л	И	И	И	И	И
$a_3$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_4$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_5$	И	Л	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
$a_6$	И	И	И	И	Л	И	Л	Л	И	И

2)

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_2$	И	И	И	И	Л	И	И	И	И	И
$a_3$	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л	И	И
$a_4$	И	И	Л	И	Л	И	Л	И	Л	И
$a_5$	Л	И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
$a_6$	И	И	И	Л	И	И	И	И	И	И

3)

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
$a_2$	И	И	И	И	Л	И	И	И	И	Л
$a_3$	И	Л	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_4$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_5$	И	И	Л	И	И	И	Л	Л	Л	Л
$a_6$	И	И	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л

**4)**

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_2$	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
$a_3$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_4$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_5$	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
$a_6$	И	Л	И	Л	Л	И	И	И	И	И

5)

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_2$	И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	И
$a_3$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_4$	И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_5$	И	И	Л	Л	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_6$	И	И	И	И	И	Л	И	И	И	И

**6)**

[illegible]

7)

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_2$	Л	И	И	И	Л	И	И	И	И	Л
$a_3$	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
$a_4$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_5$	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л	Л
$a_6$	И	Л	И	И	И	Л	И	И	И	Л

8)

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	Л	Л	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_2$	И	Л	И	И	Л	И	И	И	И	И
$a_3$	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_4$	И	И	Л	И	Л	Л	Л	Л	Л	Л
$a_5$	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
$a_6$	Л	И	И	И	И	Л	И	Л	И	И

9)

X	Y									
	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$a_1$	И	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_2$	Л	И	И	И	Л	И	И	И	И	И
$a_3$	И	Л	И	И	И	И	Л	Л	Л	Л
$a_4$	Л	И	Л	И	Л	И	Л	Л	Л	Л
$a_5$	И	И	Л	Л	И	И	Л	Л	Л	Л
$a_6$	И	И	И	Л	И	И	И	И	Л	И

Решение:

Y	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$	$b_5$	$b_6$	$b_7$	$b_8$	$b_9$	$b_{10}$
$\forall x K(x, y)$										
$\exists x K(x, y)$										

X	$\forall y K(x, y)$
$a_1$	
$a_2$	
$a_3$	
$a_4$	
$a_5$	

X	$\exists y K(x, y)$
$a_1$	
$a_2$	
$a_3$	
$a_4$	
$a_5$	

$a_6$			$a_6$	
-------	--	--	-------	--

Высказывание	Значение истинности
$\forall x \forall y K(x, y)$	
$\forall x \exists y K(x, y)$	
$\exists x \forall y K(x, y)$	
$\exists x \exists y K(x, y)$	
$\forall y \exists x K(x, y)$	
$\exists y \forall x K(x, y)$	

### 1.3. Виды форм логики предикатов

**1.3.3. Приведите к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов:**

**0)**

$\forall y \exists x T(y, x) \vee \forall z \forall x Q(z, x) ;$   
 $\neg \forall y \forall x U(y, x) \& \exists x \forall y R(y, x) ;$   
 $\forall y \exists x T(y, x) \supset \forall y \forall x Q(y, x) ;$   
 $\neg \forall y \forall x U(y, x) \supset \exists x \forall y R(y, x) ;$   
 $\forall y \forall x \exists z K(y, x, z) \supset \forall x \exists z \exists y P(y, x, z) ;$

**1)**

$\forall y (\exists x \forall y G(y, x) \vee \forall s \exists x N(y, x, s)) ;$   
 $\forall y \neg \exists x U(y, x) \& \forall x \forall y Q(y, x) ;$   
 $\exists y \forall x \exists z H(x, y, z) \supset \exists y \exists x G(y, x) ;$   
 $\forall x \neg \forall y P(y, x) \supset \exists y \exists x Q(y, x) ;$   
 $\exists y \forall x \exists z U(x, y, z) \supset \exists y \exists x \exists z G(y, x, z) ;$

**2)**

$\forall y \exists x A(y, x) \& \exists y \forall z P(y, z) ;$   
 $\neg \forall y \exists x K(y, x) \vee \exists z \exists y \forall x Q(y, x, z) ;$   
 $\forall x \exists y A(x, y) \supset \exists y \neg \forall x R(y, x) ;$   
 $\forall y \forall x U(y, x) \supset \forall x \exists y P(y, x) ;$   
 $\forall y \exists m \exists z P(y, m, z) \supset \exists m \exists y \exists z G(m, y, z) ;$

**3)**

$\forall x (\neg (\exists y A(x, y) \vee \exists y P(y, x))) ;$   
 $\exists y \forall m U(y, m) \& \forall x \forall y Q(y, x) ;$   
 $\forall z \exists x T(z, x) \supset \forall y \exists x U(y, x) ;$

$\forall x (\neg \forall y U(y, x) \supset \exists y Q(y, x)) ;$   
 $\forall z \exists x \forall y Q(z, x, y) \supset \forall y \exists x A(y, x) ;$

**4)**

$\exists x \forall y T(y, x) \vee \forall y \forall x H(y, x) ;$   
 $\forall y \neg \exists x U(y, x) \ \& \ \exists y \forall z Q(y, z) ;$   
 $\forall x \neg \forall y A(x, y) \supset \exists y \forall z T(y, z) ;$   
 $\forall y \exists m \exists z U(y, m, z) \supset \exists y \exists z Q(y, z) ;$   
 $\exists n \forall y \forall x P(n, y, x) \supset \forall y \neg \forall n \forall x R(n, y, x) ;$

**5)**

$\exists n \forall y \forall x P(n, y, x) \ \& \ \forall y \neg \exists n A(n, y) ;$   
 $\forall y (\forall m U(y, m) \vee \neg \forall x \forall m Q(y, x, m)) ;$   
 $\exists n \forall y \forall x P(n, y, x) \supset \forall y \neg \exists n A(n, y) ;$   
 $\forall y (\forall m \exists x U(y, x, m) \supset \neg \forall x \forall m Q(y, x, m)) ;$   
 $\forall y \neg \exists x G(y, x) \supset \forall y \forall x Q(y, x) ;$

**6)**

$\forall z \exists x T(z, x) \vee \forall y \exists x U(y, x) ;$   
 $\forall x (\neg \forall y U(y, x) \ \& \ \forall y Q(y, x)) ;$   
 $\exists x \forall y T(y, x) \supset \forall y \forall x H(y, x) ;$   
 $\forall y \neg \exists x U(y, x) \supset \exists y \forall x Q(y, x) ;$   
 $\forall x \exists y R(x, y) \supset \exists y \forall x P(y, x) ;$

**7)**

$\forall x \neg \forall y A(x, y) \vee \exists y \forall z T(y, z) ;$   
 $\forall y \exists m \exists z U(y, m, z) \ \& \ \exists x \exists y \exists z Q(y, x, z) ;$   
 $\forall x (\neg (\exists y A(x, y) \supset \exists y P(y, x))) ;$   
 $\exists y \forall x U(y, x) \supset \forall x \forall y Q(y, x) ;$   
 $\neg \forall y \exists x P(y, x) \supset \exists z \exists y \forall x Q(y, x, z) ;$

**8)**

$\forall x \exists y A(x, y) \vee \exists y \neg \exists x R(y, x) ;$   
 $\forall y \forall z U(y, z) \ \& \ \forall x \exists y P(y, x) ;$   
 $\forall y \forall z A(y, z) \supset \exists y \forall z P(y, z) ;$   
 $\neg \forall y \exists x K(y, x) \supset \exists z \forall y \forall x Q(y, x, z) ;$   
 $\forall y (\exists x \exists y T(y, x) \supset \forall s \exists x K(y, x)) ;$

**9)**

$\exists y \forall x \exists z H(x, y, z) \vee \exists y \forall x G(y, x) ;$   
 $\forall x \neg \forall y P(y, x) \ \& \ \exists y \exists x Q(y, x) ;$   
 $\forall y (\exists x \exists y G(y, x) \supset \forall s N(y, s)) ;$   
 $\forall y \neg \exists x U(y, x) \supset \exists x \forall y Q(y, x) ;$



$$\forall y \neg \exists x H(y, x) \supset \forall x \forall y P(y, x);$$

## 1.4. Применение логики предикатов

### 1.4.5. Запишите определения на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте их отрицания:

0) Действительная функция  $f(x)$  действительного переменного  $x$  есть **функция ограниченной вариации** на интервале  $[a, b]$ , если существует такое положительное число  $M$ , что для всех разбиений  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$  интервала  $[a, b]$  выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < M$$

1) **Абсолютным экстремумом** числовой функции  $f$  называется точка  $P_0$  в области определения  $D$  функции, обладающая свойством  $f(P_0) \geq f(P)$  для всех  $P$ , принадлежащих  $D$  (абсолютный максимум) или свойством  $f(P_0) \leq f(P)$  для всех  $P$ , принадлежащих  $D$  (абсолютный минимум).

2) Однозначная функция  $f$  комплексного переменного  $z = x + iy$  называется **аналитической функцией** в точке  $z_0$ , если в некотором круге  $|z - z_0| < r$  с центром  $z_0$  и радиусом  $r > 0$  она определена и представима степенным рядом:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

3) Функция  $F(x)$  называется **первообразной** для функции  $f(x)$  на заданном промежутке  $(a, b)$  из ее области определения  $D(f)$ , если для  $x$  из  $(a, b)$  выполняется равенство  $F'(x) = f(x)$ .

4) Точка  $x_0$  из области определения  $D(f)$  функции  $f$  называется **точкой максимума** этой функции, если найдется  $\delta$  - окрестность  $(x_0 - \delta;$

$x_0 + \delta)$  точки  $x_0$ , такая, что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) \leq f(x_0)$ .

5) Число  $b$  называется **пределом функции**  $f(x)$ , если для любого положительного числа  $\varepsilon$  найдется такое положительное число  $\delta$ , что если всех  $x \rightarrow a$ , удовлетворяющих неравенству  $|x - a| < \delta$ , будет выполняться неравенство  $|f(x) - b| < \varepsilon$

6) Точка  $x_0$  из области определения  $D(f)$  функции  $f$  называется **точкой минимума** этой функции, если найдется  $\delta$ -окрестность  $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$  точки  $x_0$ , такая, что для всех  $x \neq x_0$  из этой окрестности выполняется неравенство  $f(x) \geq f(x_0)$ .

7) Вектор-функция  $v(t)$  **ограничена**, если для каждого положительного числа  $\varepsilon$  существует такое число  $\delta$ , что из  $0 < |t - t_1| < \delta$  следует  $|v(t) - v_1| < \varepsilon$ .

8) Аппроксимация функции  $f$  на отрезке  $[a, b]$  функциями  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$  при условии, что отклонение  $f$  от  $X_n$  измеряется с помощью  $\rho(f, X_n) = \max |f(x) - X_n(x)|$  при  $a \leq x \leq b$ , называется **равномерной аппроксимацией**.

9) **Интервалом числовой прямой** называется множество действительных чисел  $x$ , удовлетворяющих неравенству  $a < x < b$ , где  $a$  и  $b$  – действительные числа,  $x_0 = (a + b)/2$  – центр интервала. Интервал числовой прямой называется  $\delta$ -окрестностью точки  $x_0$ , если  $|x - x_0| < \delta$ .

**1.4.6. Запишите теоремы и свойства на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте их отрицания:**

#### 0) Основная теорема алгебры.

Всякий отличный от константы многочлен вида:

$$F(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$$

с действительными коэффициентами имеет, по крайней мере, один корень в поле комплексных чисел.

#### 1) Общие свойства числовых полей:

Для любых элементов  $a$  и  $b$  поля  $F$  определены их сумма  $a + b$  и произведение  $a \cdot b$ . В поле существует нуль и единица.

#### 2) Основная теорема алгебры по Эйлеру:

Всякий многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с вещественными коэффициентами.

#### 3) Теорема о достаточном условии монотонности

Если функция  $f(x)$  дифференцируема в промежутке  $X$  и  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) для всех  $x \in X$ , то  $f(x)$  возрастает (соответственно убывает) в промежутке  $X$ .

**4) Следствие из основной теоремы алгебры:**

Любой многочлен степени  $n$  над полем комплексных чисел имеет в нём ровно  $n$  корней, с учётом кратности корней.

**5) Лемма Д'Аламбера**

Если для какого-нибудь  $x$   $f(x) \neq 0$ , где  $f(x)$  - многочлен степени  $\geq 1$ , то найдется точка  $x_1$  такая, что  $|f(x_1)| < |f(x)|$ .

**6) Общие свойства числовых полей:**

Для любого числового поля  $F$  справедливы тождества:

$a + b = b + a$	$(ab)c = a(bc)$
$(a + b) + c = a + (b + c)$	$a \times 1 = a$
$a + 0 = a$	$a \times 1/a = 1$
$a + (-a) = 0$	$a(b + c) = ab + ac$
$ab = ba$	

**7) Теорема о производной**

Функция  $y = f(x)$  имеет в точке  $x$  (конечную) производную в том и только в том случае, если она дифференцируема в этой точке. При этом верно равенство  $dy = f'(x) dx$ .

**8) Общие свойства числовых полей:**

Для любого числа  $a$  из поля  $F$  в  $F$  есть противоположное ему число  $-a$ , а если  $a \neq 0$ , то и обратное ему число  $1/a$ .

**9) Теорема о достаточном условии выпуклости вверх и вниз**

Если функция  $f(x)$  дифференцируема дважды в интервале  $X$  и в ней  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ), то  $f(x)$  является выпуклой вниз (соответственно выпуклой вверх) в интервале  $X$ .

## Тема 2. Комбинаторика

## 2.5. Перестановки с повторениями

Перестановки с повторениями вычисляются по формуле:

$$P_n(m_1, m_2, \dots, m_k) = \frac{n!}{m_1! m_2! \dots m_k!}$$

- 0) Сколько различных шестизначных чисел можно составить из цифр: 1, 1, 1, 5, 5, 9?
- 1) Сколькими способами можно расположить в ряд 2 зеленые и 4 красные лампочки?
- 2) Сколько всего шестизначных чисел, у каждого из которых цифра 2 встречается два раза, а цифра 3 - четыре раза?
- 3) Имеется 5 мест на флаштоке и 5 флагов: 2 красных и 3 белых. Сколько можно изобразить различных сигналов, если использовать все флаги одновременно?
- 4) Сколько различных слов можно получить, переставляя буквы в слове «молоко»? В слове «караоке»? В слове «ингредиент»?
- 5) В магазине игрушек имеются 7 одинаковых Чебурашек и 2 одинаковых Крокодила. Сколькими способами их можно расставить в один ряд на витрине?
- 6) Сколькими способами можно разделить 40 одинаковых яблок а) между 4 мальчиками; в) чтобы каждый получил, по крайней мере, 3 яблока?
- 7) Сколькими способами в библиотеке можно расположить на одной полке 6 экземпляров романа «Овод», 7 экземпляров сказки «Золушка» и 8 экземпляров учебника Акимова «Дискретная математика»?
- 8) Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 ладьи, 2 коня, 2 слона, ферзь и король) на первой линии шахматной доски?
- 9) В магазине ``Все для чая'' продается 7 чашек, 5 блюдец и 6 чайных ложек. Сколькими способами можно распределить посуду с разными названиями?

## 2.6. Инверсии. Обратные перестановки

### 2.6.1. Составьте таблицу инверсий для перестановки:

- |   |   |
|---|---|
| 0) $b = \{5, 7, 3, 4, 2, 6, 1, 10, 11, 8, 9\};$ | 5) $b = \{11, 2, 9, 8, 5, 6, 7, 4, 3, 10, 1\};$ |
| 1) $b = \{7, 4, 3, 1, 5, 6, 2, 8, 11, 10, 9\};$ | 6) $b = \{6, 10, 3, 4, 5, 1, 8, 7, 9, 2, 11\};$ |
| 2) $b = \{3, 2, 1, 4, 5, 10, 7, 11, 9, 6, 8\};$ | 7) $b = \{8, 9, 5, 4, 3, 6, 7, 1, 2, 10, 11\};$ |
| 3) $b = \{10, 11, 8, 7, 5, 6, 4, 3, 9, 1, 2\};$ | 8) $b = \{9, 7, 10, 4, 11, 6, 2, 8, 1, 3, 5\};$ |
| 4) $b = \{4, 5, 3, 1, 2, 8, 7, 6, 9, 11, 10\};$ | 9) $b = \{4, 7, 6, 9, 11, 10, 5, 8, 3, 1, 2\}.$ |
-

---

**2.6.2. Составьте перестановку по заданной таблице инверсий:**

- |  |   |
|--|---|
| 0) $d = \{8, 6, 7, 3, 6, 4, 1, 3, 0, 0, 0\};$  | 5) $d = \{9, 9, 7, 6, 4, 4, 3, 2, 2, 0, 0\};$ |
| 1) $d = \{7, 7, 4, 2, 2, 2, 2, 0, 0, 0, 0\};$  | 6) $d = \{2, 1, 0, 0, 0, 4, 1, 3, 2, 0, 0\};$ |
| 2) $d = \{5, 1, 7, 6, 2, 0, 2, 1, 1, 0, 0\};$  | 7) $d = \{3, 5, 2, 1, 1, 1, 0, 0, 2, 1, 0\};$ |
| 3) $d = \{10, 1, 7, 6, 3, 3, 3, 2, 1, 1, 0\};$ | 8) $d = \{6, 4, 2, 2, 0, 0, 0, 2, 2, 0, 0\};$ |
| 4) $d = \{3, 3, 2, 0, 0, 2, 1, 0, 0, 1, 0\};$  | 9) $d = \{4, 2, 6, 5, 1, 2, 8, 9, 2, 3, 0\}.$ |

---

**2.6.3. Составьте обратную перестановку  $a^{-1}$  для заданной перестановки  $a$  и вычислите:  $a a^{-1}$ :**

- |   |   |
|---|---|
| 0) $A = \{5, 7, 3, 4, 2, 6, 1, 10, 11, 8, 9\};$ | 5) $A = \{11, 2, 9, 8, 5, 6, 7, 4, 3, 10, 1\};$ |
| 1) $A = \{7, 4, 3, 1, 5, 6, 2, 8, 11, 10, 9\};$ | 6) $A = \{6, 10, 3, 4, 5, 1, 8, 7, 9, 2, 11\};$ |
| 2) $A = \{3, 2, 1, 4, 5, 10, 7, 11, 9, 6, 8\};$ | 7) $A = \{8, 9, 5, 4, 3, 6, 7, 1, 2, 10, 11\};$ |
| 3) $A = \{10, 11, 8, 7, 5, 6, 4, 3, 9, 1, 2\};$ | 8) $A = \{9, 7, 10, 4, 11, 6, 2, 8, 1, 3, 5\};$ |
| 4) $A = \{4, 5, 3, 1, 2, 8, 7, 6, 9, 11, 10\};$ | 9) $A = \{4, 7, 6, 9, 11, 10, 5, 8, 3, 1, 2\}.$ |

---

**2.6.4. Найдите перестановку  $c = ab$ , если:**

- |   |   |
|---|---|
| 0) $A = \{11, 2, 9, 8, 5, 6, 7, 4, 3, 10, 1\};$<br>$b = \{7, 4, 3, 1, 5, 6, 2, 8, 11, 10, 9\};$ | 5) $a = \{5, 7, 3, 4, 2, 6, 1, 10, 11, 8, 9\};$<br>$b = \{7, 4, 3, 1, 5, 6, 2, 8, 11, 10, 9\};$ |
| 1) $A = \{6, 10, 3, 4, 5, 1, 8, 7, 9, 2, 11\};$<br>$b = \{7, 4, 3, 1, 5, 6, 2, 8, 11, 10, 9\};$ | 6) $A = \{7, 4, 3, 1, 5, 6, 2, 8, 11, 10, 9\};$<br>$b = \{4, 7, 6, 9, 11, 10, 5, 8, 3, 1, 2\};$ |
| 2) $A = \{8, 9, 5, 4, 3, 6, 7, 1, 2, 10, 11\};$<br>$b = \{7, 4, 3, 1, 5, 6, 2, 8, 11, 10, 9\};$ | 7) $A = \{3, 2, 1, 4, 5, 10, 7, 11, 9, 6, 8\};$<br>$b = \{9, 7, 10, 4, 11, 6, 2, 8, 1, 3\};$    |
| 3) $A = \{9, 7, 10, 4, 11, 6, 2, 8, 1, 3, 5\};$<br>$b = \{5, 7, 3, 4, 2, 6, 1, 10, 11, 8, 9\};$ | 8) $A = \{10, 11, 8, 7, 5, 6, 4, 3, 9, 1, 2\};$<br>$b = \{8, 9, 5, 4, 3, 6, 7, 1, 2, 10, 11\};$ |
| 4) $A = \{4, 7, 6, 9, 11, 10, 5, 8, 3, 1, 2\};$<br>$b = \{3, 2, 1, 4, 5, 10, 7, 11, 9, 6, 8\}.$ | 9) $A = \{4, 5, 3, 1, 2, 8, 7, 6, 9, 11, 10\};$<br>$b = \{6, 10, 3, 4, 5, 1, 8, 7, 9, 2, 11\};$ |
- 

## 2.8. Сочетания с повторениями

Сочетаниями с повторениями из  $n$  по  $m$  называются неупорядоченные  $m$ -элементные выборки, в которых элементы могут повторяться. Количество перестановок с повторениями вычисляется по формуле

$$\tilde{C}_n^m = P_{n+m-1}(n-1, m) = \frac{(n+m-1)!}{(n-1)! \cdot m!}$$

- 0) В почтовом отделении имеются открытки 3 видов. Сколькими способами можно купить набор из 6 открыток?
- 1) Сколькими способами можно выбрать четыре из четырех пятикопеечных монет и из четырех двухкопеечных монет?

- 2) В хлебном отделе имеются булки белого и черного хлеба. Сколькими способами можно купить 8 булок хлеба?
- 3) Сколько имеется костей в обычной игре "домино"?
- 4) Сколько вариантов строения ДНК Шубуршунчика обворожительного может быть, если длина цепи 1000 нуклеотидов (нуклеотиды 4 видов: А, Т, Г, Ц)?
- 5) Сколько всего чисел можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, в каждом из которых цифры расположены в неубывающем порядке?
- 6) Шесть пассажиров садятся на остановке в трамвайный поезд, состоящий из трех трамвайных вагонов. Сколькими различными способами могут они распределиться в каждом из 3 вагонов?
- 7) Как велико число отличных друг от друга результатов бросаний двух одинаковых кубиков?
- 8) Сколькими способами можно выбрать 7 крупных апельсинов из 2 имеющихся на рынке сортов?
- 9) В магазине продаются белые, черные и красные носки. Сколькими способами можно купить 5 пар?

## 2.10. Треугольник Паскаля. Бином Ньютона

### 2. Вычислите без калькулятора:

- |   |   |
|---|---|
| 0) $\sqrt{(2\sqrt{6} + \sqrt{2})^4 - 27 - 208 \cdot \sqrt{12}}$ ; | 1) $\sqrt{(\sqrt{3} - 3\sqrt{2})^4 - 32 + 252 \cdot \sqrt{6}}$ ;  |
| 2) $\sqrt{(3\sqrt{2} + \sqrt{5})^4 - 48 + 276 \cdot \sqrt{10}}$ ; | 3) $\sqrt{(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})^4 - 21 - 88 \cdot \sqrt{6}}$ ;   |
| 4) $\sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{2})^4 - 3 + 112 \cdot \sqrt{6}}$ ;   | 5) $\sqrt{(\sqrt{3} + \sqrt{4})^4 - 16 - 28 \cdot \sqrt{12}}$ ;   |
| 6) $\sqrt{(2\sqrt{3} - \sqrt{4})^4 - 7 + 128 \cdot \sqrt{12}}$ ;  | 7) $\sqrt{(2\sqrt{4} - \sqrt{3})^4 - 24 + 152 \cdot \sqrt{12}}$ ; |
| 8) $\sqrt{(\sqrt{5} + 2\sqrt{3})^4 - 136 \cdot \sqrt{15}}$ ;      | 9) $\sqrt{(\sqrt{5} - \sqrt{3})^4 - 3 + 32 \cdot \sqrt{15}}$ ;    |

*Задание 5. Записать все сочетания из элементов множества  $A$  по два элемента без повторений:*

- 0)  $A = \{2, 7, 9\};$
- 1)  $A = \{x, y, z\};$
- 2)  $A = \{a, b, c\};$
- 3)  $A = \{X, Y, Z\};$
- 4)  $A = \{+, -, \times\};$
- 5)  $A = \{!, \#, \%\};$
- 6)  $A = \{\alpha, \beta, \lambda\}$
- 7)  $A = \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\};$
- 8)  $A = \{B, \Pi, MP\};$
- 0)  $A = \{Q, W, E\}.$

*Задание 7. Записать все перестановки без повторений из элементов множества  $A$ :*

- 0)  $A = \{2, 7, 9\};$
- 1)  $A = \{x, y, z\};$
- 2)  $A = \{a, b, c\};$
- 3)  $A = \{X, Y, Z\};$
- 4)  $A = \{+, -, \times\};$
- 5)  $A = \{!, \#, \%\};$
- 6)  $A = \{\alpha, \beta, \lambda\}$
- 7)  $A = \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\};$
- 8)  $A = \{B, \Pi, MP\};$
- 9)  $A = \{Q, W, E\}.$

*Задание 6. Записать все сочетания из элементов множества  $A$  по три элемента с повторениями:*

- 9)  $A = \{2, 7, 9\};$
- 10)  $A = \{x, y, z\};$
- 11)  $A = \{a, b, c\};$
- 12)  $A = \{X, Y, Z\};$
- 13)  $A = \{+, -, \times\};$
- 14)  $A = \{!, \#, \%\};$
- 15)  $A = \{\alpha, \beta, \lambda\}$
- 16)  $A = \{\leftarrow, \uparrow, \rightarrow\};$
- 17)  $A = \{B, \Pi, MP\};$
- 0)  $A = \{Q, W, E\}.$

*Задание 8. Сколько существует  $N$ -битовых строк, содержащих  $A$  нулей и  $K$  единиц, если:*

- 0)  $N=8; A=3, K=5;$  1)  $N=8; A=2, K=6;$
- 2)  $N=8; A=4, K=4;$  3)  $N=9; A=2, K=7;$
- 4)  $N=9; A=3, K=6;$  5)  $N=9; A=4, K=5;$
- 6)  $N=10; A=3, K=7;$  7)  $N=10; A=4, K=6;$
- 8)  $N=10; A=2, K=8;$  9)  $N=10; A=5, K=5.$

**Задание 9.** Сколько трехзначных чисел, меньших заданного числа  $A$ , можно образовать, используя цифры 2,3,4,5,6,8,9 без повторений, если:

- |              |              |
|--------------|--------------|
| 0) $A=450$ ; | 1) $A=350$ ; |
| 2) $A=250$ ; | 3) $A=420$ ; |
| 4) $A=410$ ; | 5) $A=380$ ; |
| 6) $A=370$ ; | 7) $A=430$ ; |
| 8) $A=390$ ; | 9) $A=460$ . |

**Задание 10.** Сколькими способами  $N$  пар, пришедших в кино, могут занять места, если все пять пар сидят подряд и:

- |             |             |            |
|-------------|-------------|------------|
| 0) $N=4$ ;  | 1) $N=5$ ;  | 2) $N=7$ ; |
| 3) $N=6$ ;  | 4) $N=8$ ;  | 5) $N=9$ ; |
| 6) $N=3$ ;  | 7) $N=10$ ; |            |
| 8) $N=12$ ; | 9) $N=11$ . |            |

## Тема 3. Графы.

### **3.1.7. Решите задачи по вычислению валентности вершин графа:**

- 0) В одной компании из 7 человек: Саша дружит с Леной и Алешей, Надя с Колей, Ваня с Сашей и Колей. Какова валентность вершин графа?
- 1) В государстве 100 городов, и из каждого из них выходит 4 дороги. Сколько всего дорог в государстве?
- 2) В классе 30 человек. Может ли быть так, что 9 из них имеют по 3 друга (в этом классе), 11 - по 4 друга, а 10 - по 5 друзей?
- 3) В городе Маленьком 15 телефонов. Можно ли их соединить проводами так, чтобы было 4 телефона, каждый из которых соединен с тремя другими, 8 телефонов, каждый из которых соединен с шестью, и 3 телефона, каждый из которых соединен с пятью другими?
- 4) - У меня зазвонил телефон. - Кто говорит? - Слон... А потом позвонил Крокодил... А потом позвонили Зайчатки... А потом позвонили Мартышки... А потом позвонил Медведь... А потом позвонили Цапли... Итак, у Слона, Крокодила, Зайчаток, Мартышек, Медведя, Цапель и у меня установлены телефоны. Каждые два телефонных аппарата соединены проводом. Как сосчитать, сколько для этого понадобилось проводов? Указание: заметьте, каждый провод соединяет два аппарата.



- 5) У короля 19 баронов-вассалов. Может ли оказаться так, что у каждого вассального баронства 1, 5 или 9 соседних баронств?
- 6) Может ли в государстве, в котором из каждого города выходит 3 дороги, быть ровно 100 дорог?
- 7) Джон, приехав из Диснейленда, рассказывал, что там на заколдованном озере имеются 7 островов, с каждого из которых ведет 1, 3 или 5 мостов. Верно ли, что хотя бы один из этих мостов обязательно выходит на берег озера?
- 8) Можно ли нарисовать на плоскости 9 отрезков так, чтобы каждый пересекался, ровно с тремя другими?
- 9) Резидент одной иностранной разведки сообщил в центр о готовящемся подписании ряда двусторонних соглашений между пятнадцатью бывшими республиками СССР. Согласно его донесению, каждая из них заключит договор ровно с тремя другими. Заслуживает ли резидент доверия? Указание: подсчитайте двумя способами число подписей под всеми двусторонними соглашениями. И подумайте, может ли оно быть нечётным?

### ***3.1.8. Решите задачи по вычислению валентности вершин графа:***

- 0) В системе связи, состоящей из 2001 абонентов, каждый абонент связан ровно с  $n$  другими. Определите все возможные значения  $n$ . Указание: Посчитайте количество пар связанных абонентов и покажите, что  $n$  - чётно.
- 1) Докажите, что не существует графа с пятью вершинами, степени которых равны 4, 4, 4, 4, 2.
- 2) В классе 20 учеников, причем каждый дружит не менее, чем с 14-ю другими. Можно ли утверждать, что найдутся четыре ученика, которые все дружат между собой? Указание У одного из учеников 14 друзей. Достаточно выбрать из них трех попарно знакомых.
- 3) В сказочной стране Перра-Терра среди прочих обитателей проживают Карабасы и Барабасы. Каждый Карабас знаком с шестью Карабасами и девятью Барабасами. Каждый Барабас знаком с десятью Карабасами и семью Барабасами. Кого в этой стране больше — Карабасов или Барабасов?
- 4) Можно ли 77 телефонов соединить между собой проводами так, чтобы каждый был соединён ровно с пятнадцатью?
- 5) На кошачьей выставке каждый посетитель погладил ровно трех кошек. При этом оказалось, что каждую кошку погладили ровно три посетителя. Докажите, что посетителей было ровно столько же,

сколько кошек. Указание: мысленно натяните ниточки между каждой кошкой и погладившим её посетителем.

- 6) На третье занятие кружка по математике пришло 17 человек. Может ли случиться так, что каждая девочка знакома ровно с 3 из присутствующих на занятии кружковцев, а каждый мальчик ровно с 5?
- 7) Каждые две из шести ЭВМ соединены своим проводом. Можно ли раскрасить каждый из этих проводов в один из пяти цветов так, чтобы из каждой ЭВМ выходило пять проводов разного цвета?
- 8) В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?
- 9) Можно ли занумеровать ребра куба натуральными числами от 1 до 12 так, чтобы для каждой вершины куба сумма номеров ребер, которые в ней сходятся, была одинаковой?

### ***3.1.9. Решите задачи по выявлению связности графа:***

- 0) Можно ли соединить пять точек в связную систему так, чтобы при стирании любого отрезка образовались ровно две связные системы точек, не связанные друг с другом? (Мы считаем, что в местах пересечения отрезков переход с одного из них на другой невозможен.)
- 1) В Тридевятом царстве лишь один вид транспорта - ковер-самолет. Из столицы выходит 21 ковроволния, из города Дальний - одна, а из всех остальных городов - по 20. Докажите, что из столицы можно долететь в Дальний (возможно, с пересадками).
- 2) В стране из каждого города выходит 100 дорог и от любого города можно добраться до любого другого. Одну дорогу закрыли на ремонт. Докажите, что и теперь эта возможность сохранилась.
- 3) Тетрадный лист раскрасили в 23 цвета по клеткам. Пара цветов называется хорошей, если существует две соседние клетки, закрашенные этими цветами. Каково минимальное число хороших пар?
- 4) В стране Древляндия 101 город, и некоторые из них соединены дорогами. При этом любые два города соединяет ровно один путь. Сколько в этой стране дорог?
- 5) Между 9 планетами Солнечной системы введено космическое сообщение. Ракеты летают по следующим маршрутам: Земля-Меркурий, Плутон-Венера, Земля-Плутон, Плутон-Меркурий,

Меркурий-Венера, Уран-Нептун, Нептун-Сатурн, Сатурн-Юпитер, Юпитер-Марс и Марс-Уран. Можно ли добраться с Земли до Марса?

- 6) В стране Семерка 15 городов, каждый из которых соединен дорогами не менее, чем с 7 другими. Докажите, что из любого города можно добраться до любого другого (в т.ч., проезжая через другие города).
- 7) Гарри Поттер умеет превращать жабу в принцессу, гриб в жабу и грушу, грушу в яблоко, огрызок от яблока в котёнка и ёжика, котёнка в грушу или яблоко, ёжика в грушу, а яблоко — только в огрызок. Сейчас у него есть яблоко. Сможет ли он превратить его в принцессу?
- 8) В стране Цифра есть 9 городов с названиями от 1 до 9. Путешественник обнаружил, что два города соединены железной дорогой, если двузначное число, составленное из цифр-названий этих городов, делится на 3. Можно ли добраться на поезде из города 1 в город 9?
- 9) Как соединить 50 городов наименьшим числом авиалиний так, чтобы из любого города можно было попасть в любой, сделав не более двух пересадок?

### 3.3. Представление графов в ПЭВМ

**3.3.1. Граф  $G(V,E)$ :  $V=\{a, b, c, d, e\}$ , задан как алгебраическая система.**

**а) Для приведенного отношения задайте граф геометрически.**

**б) Выясните, является ли заданное отношение отношением эквивалентности.**

- 0)  $R = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c), (d, e), (e, d), (d, d)\};$
- 1)  $R = \{(a, b), (b, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c), (c, a), (a, c), (c, c), (d, d)\};$
- 2)  $R = \{(b, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, c), (c, d), (d, c), (d, e), (e, d), (a, a), (e, e)\};$
- 3)  $R = \{(a, b), (a, a), (b, c), (b, b), (c, c), (d, d), (d, c), (d, e), (e, e), (a, e), (e, a)\};$
- 4)  $R = \{(b, c), (b, a), (b, d), (c, b), (c, a), (c, d), (d, c), (d, a), (e, d), (a, b), (d, d)\};$
- 5)  $R = \{(b, b), (a, a), (c, c), (c, b), (b, c), (c, d), (d, c), (d, d), (e, d), (d, e), (e, e)\};$
- 6)  $R = \{(a, c), (b, c), (c, c), (c, b), (c, a), (c, d), (d, c), (d, e), (d, d), (a, a), (e, a)\};$
- 7)  $R = \{(b, b), (a, a), (c, c), (d, b), (b, d), (d, d), (d, c), (d, e), (d, a), (a, c), (e, c)\};$
- 8)  $R = \{(e, d), (d, a), (a, b), (c, b), (e, c), (c, e), (e, a), (b, e), (e, e), (a, e), (c, c)\};$
- 9)  $R = \{(c, b), (b, c), (b, a), (a, b), (c, c), (c, d), (e, c), (d, e), (e, d), (a, a), (e, e)\}.$

**3.3.2. Дана матрица смежности графа. Задайте граф геометрически.**

**Укажите: 1) матрицу инцидентности; 2) валентность вершин.**

$$\begin{array}{ccccc}
0) \begin{pmatrix} 01111 \\ 10100 \\ 11010 \\ 10100 \\ 10000 \end{pmatrix} & 1) \begin{pmatrix} 01010 \\ 10110 \\ 01001 \\ 11000 \\ 00100 \end{pmatrix} & 2) \begin{pmatrix} 01100 \\ 10000 \\ 10011 \\ 00100 \\ 00100 \end{pmatrix} & 3) \begin{pmatrix} 01111 \\ 10011 \\ 10001 \\ 11001 \\ 11110 \end{pmatrix} & 4) \begin{pmatrix} 01110 \\ 10001 \\ 10010 \\ 10101 \\ 01010 \end{pmatrix}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
5) \begin{pmatrix} 01101 \\ 10110 \\ 10010 \\ 10111 \\ 10001 \end{pmatrix} & 6) \begin{pmatrix} 01100 \\ 10111 \\ 11010 \\ 11100 \\ 10111 \end{pmatrix} & 7) \begin{pmatrix} 01011 \\ 12101 \\ 11011 \\ 10101 \\ 10012 \end{pmatrix} & 8) \begin{pmatrix} 10011 \\ 00101 \\ 11110 \\ 00100 \\ 00101 \end{pmatrix} & 9) \begin{pmatrix} 01100 \\ 11100 \\ 01011 \\ 11101 \\ 10110 \end{pmatrix}
\end{array}$$

**3.3.3. Орграф  $G_1(V,E)$ :  $V=\{a, b, c, d, e, f\}$ , задан как алгебраическая система.**

**а) Для приведенного отношения задайте орграф геометрически.**

**б) Постройте матрицу смежности орграфа.**

- 0)  $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, a), (a, c), (d, e), (e, d)\};$
- 1)  $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c), (c, a), (a, c)\};$
- 2)  $R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (c, d), (d, c), (d, e), (e, d)\};$
- 3)  $R = \{(a, b), (b, c), (a, c), (b, e), (c, f), (c, d), (d, f), (f, e)\};$
- 4)  $R = \{(b, c), (a, d), (b, a), (d, c), (b, d), (c, a), (f, d), (f, c)\};$
- 5)  $R = \{(b, a), (a, a), (b, c), (c, d), (d, c), (d, b), (d, a), (d, e)\};$
- 6)  $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (c, a), (d, e), (e, d), (c, c), (d, b)\};$
- 7)  $R = \{(b, a), (c, c), (a, d), (c, a), (d, e), (e, c), (d, b), (e, f)\};$
- 8)  $R = \{(a, b), (a, c), (a, d), (e, a), (d, e), (e, d), (c, b), (d, d)\};$
- 9)  $R = \{(a, e), (a, a), (a, d), (c, a), (d, e), (d, d), (c, c), (b, d)\};$

**3.3.4. Дана матрица инцидентности орграфа. а) Задайте оргграф геометрически, в) постройте матрицу смежности.**

0)

0	1	0	0	1	1	-1	0
1	0	0	1	-1	0	1	0
0	-1	0	-1	0	0	0	1
-1	0	-1	0	0	0	0	1
0	0	1	0	0	-1	0	0

2)

1	0	1	0	-1	0	0	0
0	1	0	-1	0	0	1	0
0	0	0	0	0	-1	0	-1
0	0	-1	1	0	0	-1	1
-1	-1	0	0	1	1	0	0

4)

0	1	0	-1	1	0	0	-1
0	0	0	0	-1	1	0	1
1	-1	1	0	0	-1	0	0
-1	0	0	0	0	0	-1	0
0	0	-1	1	0	0	1	0

6)

1	-1	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	-1	1	0
-1	1	0	-1	1	0	-1	1
0	0	-1	1	0	0	0	-1
0	0	0	0	-1	1	0	0

8)

1	0	0	1	0	0	-1	-1
0	0	-1	0	-1	0	0	0
0	1	0	-1	0	-1	1	0
-1	0	1	0	1	0	0	0
0	-1	0	0	0	1	0	-1

1)

1	0	0	0	-1	0	-1	0
-1	1	0	0	0	-1	0	1
0	-1	1	0	0	0	1	0
0	0	-1	1	0	1	0	-1
0	0	0	-1	1	0	0	0

3)

0	0	-1	0	1	1	0	0
1	0	0	0	0	-1	1	-1
-1	1	1	1	0	0	0	0
0	-1	0	0	0	0	-1	1
0	0	0	-1	-1	0	0	0

5)

-1	0	0	-1	1	0	0	-1
1	1	-1	0	0	0	0	0
0	-1	0	0	-1	1	0	0
0	0	0	0	0	-1	1	0
0	0	1	1	0	0	-1	1

7)

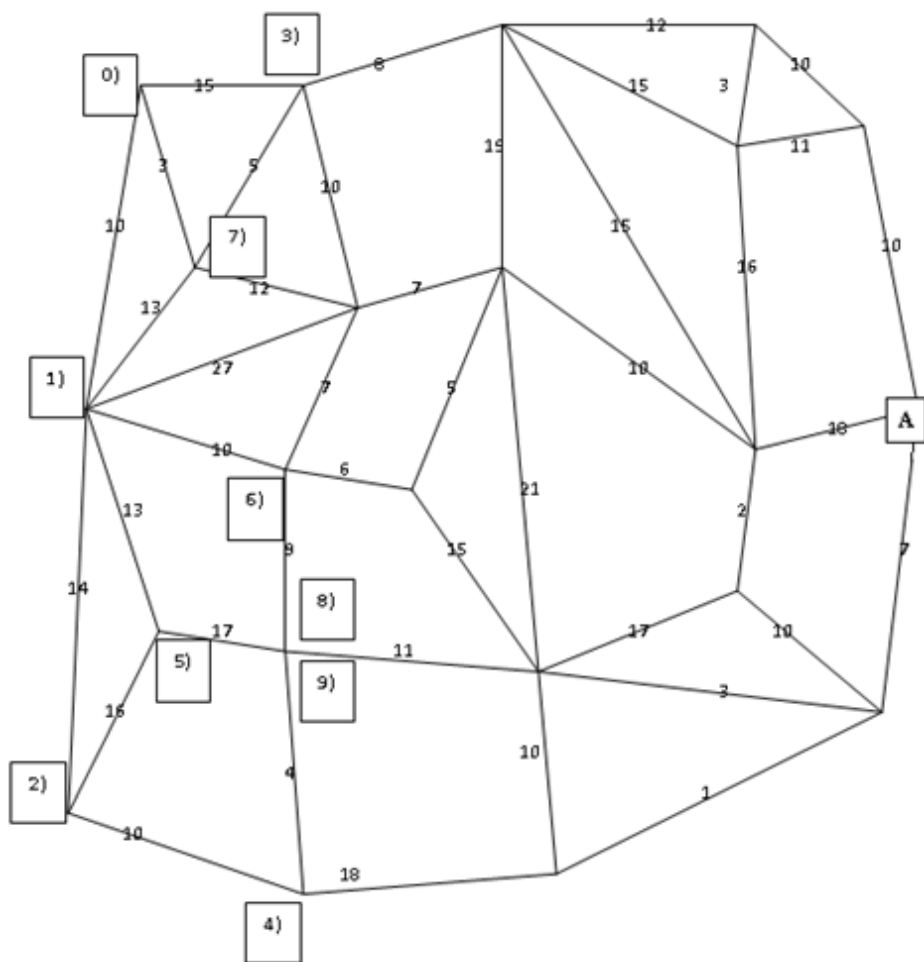
-1	0	0	-1	0	0	0	0
0	0	-1	1	0	0	-1	1
1	1	0	0	1	0	0	0
0	0	1	0	-1	1	0	-1
0	-1	0	0	0	-1	1	0

9)

0	0	0	1	1	0	0	-1
-1	0	0	0	-1	1	-1	0
1	1	0	0	0	0	0	1
0	-1	1	0	0	-1	1	0
0	0	-1	-1	0	0	0	0

### 3.4. Задачи оптимизации на графах

**3.4.3. Определите кратчайший путь от вершины графа, отмеченной номером варианта до вершины Б, используя алгоритм приписывания индексов.**



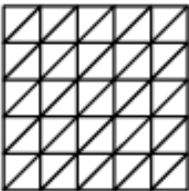
**3.4.4. Дано множество пунктов  $A=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$ . Построить граф самой экономичной сети дорог, если прокладка дорог  $(1,2), (1,3), (1,4), (1,5), (1,6), (1,7), (1,8), (2,3), (2,4), (2,5), (2,6), (2,7), (2,8), (3,4), (3,5), (3,6), (3,7), (3,8), (4,5), (4,6), (4,7), (4,8), (5,6), (5,7), (5,8), (6,7), (6,8), (7,8)$  имеет соответственно стоимости, заданные множеством:**

- 0)  $A=\{10,11,9,8,9,15,5,12,7,14,8,10,2,6,7,18,3,21,12,14,3,6,23,3,4,8,6,9\}$
- 1)  $A=\{12,10,9,8,9,13,5,19,7,12,8,10,2,6,7,18,3,21,12,14,3,6,23,5,4,7,5,7\}$
- 2)  $A=\{14,11,7,8,6,15,5,12,7,17,8,11,2,6,9,12,3,21,12,14,3,8,23,3,4,8,3,7\}$
- 3)  $A=\{15,11,9,7,9,11,5,12,9,14,8,10,2,4,7,14,3,20,11,16,3,6,22,3,5,8,4,9\}$
- 4)  $A=\{10,11,9,8,9,15,5,12,7,14,8,10,2,6,7,18,3,21,12,14,3,6,23,3,4,8,6,9\}$
- 5)  $A=\{10,12,4,9,9,12,6,12,7,14,8,10,2,6,7,18,3,21,12,14,3,6,23,3,4,8,3,8\}$
- 6)  $A=\{14,14,6,8,5,11,7,13,7,17,8,12,2,6,7,18,3,21,12,14,3,6,23,3,4,8,6,9\}$
- 7)  $A=\{10,11,9,8,9,15,5,12,7,14,8,10,3,6,5,17,2,20,12,16,3,7,24,4,6,8,7,4\}$
- 8)  $A=\{16,11,4,8,7,16,8,10,4,12,8,13,3,8,7,14,5,23,10,13,5,6,27,4,5,9,6,3\}$
- 9)  $A=\{11,15,9,8,5,15,3,11,7,16,5,10,6,8,7,17,3,25,10,13,3,4,21,3,6,7,6,9\}$

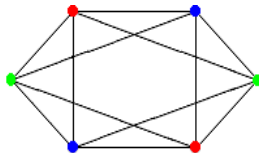
### 3.5. Эйлеровы и гамильтоновы графы

**3.5.1. Можно ли нарисовать картинку, не отрывая карандаша от бумаги и проводя каждую линию ровно один раз? Какие из них являются эйлеровыми графами?**

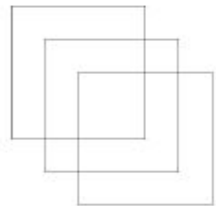
0)



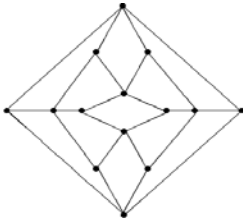
1)



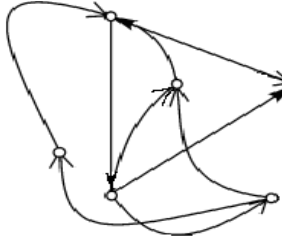
2)



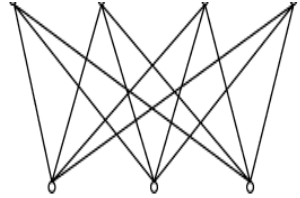
3)



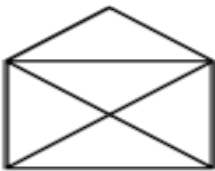
4)



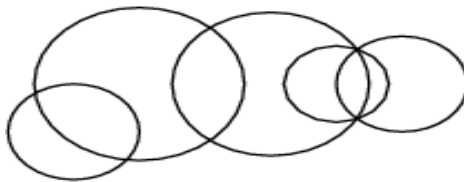
5)



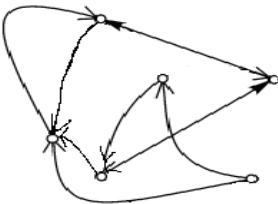
6)



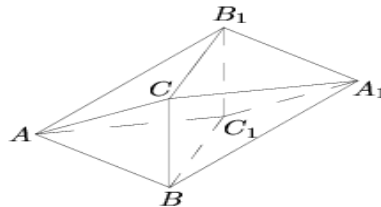
7)



8)



9)



### 3.5.2. Задайте граф геометрически и решите задачу:

Имеется группа островов, соединенных мостами так, что от каждого острова можно добраться до любого другого. Турист обошел все острова, пройдя по каждому мосту ровно один раз. На острове Троекратном он побывал трижды. Сколько мостов ведет с Троекратного, если турист:

- 0) не с него начал и не на нем закончил?
- 1) с него начал, но не на нем закончил?
- 2) с него начал и на нем закончил?
- 3) Дан кусок проволоки длиной 120 см. Можно ли, не ломая проволоки, изготовить каркас куба с ребром 10 см?
- 4) В стране Озерная 7 озер, соединенных между собой 10 непересекающимися каналами, причем от любого озера можно доплыть



- до любого другого. Сколько в этой стране островов?
- 5) Можно ли построить 3 дома, вырыть 3 колодца и соединить тропинками каждый дом с каждым колодцем так, чтобы тропинки не пересекались?
  - 6) Можно ли составить решетку размером  $4 \times 4$  (длина стороны клетки = 1):  
а) из 5 ломаных длины 8? б) из 8 ломаных длины 5?
  - 7) В квадрате отметили 20 точек и соединили их непересекающимися отрезками друг с другом и с вершинами квадрата так, что квадрат разбился на треугольники. Сколько получилось треугольников?
  - 8) В стране несколько городов, некоторые пары городов соединены беспосадочными рейсами одной из  $N$  авиакомпаний, причем из каждого города есть ровно по одному рейсу каждой из авиакомпаний. Известно, что из любого города можно долететь до любого другого (возможно, с пересадками). Из-за финансового кризиса был закрыт  $N-1$  рейс, но ни в одной из авиакомпаний не закрыли более одного рейса. Докажите, что по-прежнему из любого города можно долететь до любого другого.
  - 9) В Совершенном городе шесть площадей. Каждая площадь соединена прямыми улицами ровно с тремя другими площадями. Никакие две улицы в городе не пересекаются. Из трёх улиц, отходящих от каждой площади, одна проходит внутри угла, образованного двумя другими. Начертите возможный план такого города.

## Тема 4. Автоматы.

### **4.2. Задачи синтеза автоматов**

**4.2.1. Постройте конечный автомат, выдающий на выходе символ “!”, всякий раз, когда во входной двоичной последовательности встречается:**

- 0) последовательность 0000;
- 1) последовательность 1111;
- 2) последовательность 0110;
- 3) последовательность 0111;
- 4) последовательность 1000;
- 5) последовательность 0011;
- 6) последовательность 0010;
- 7) последовательность 1110;
- 8) последовательность 0001;
- 9) последовательность 1100.

**4.2.2. Постройте конечный автомат, выдающий на выходе символ “♪”, всякий раз, когда во входной последовательности в алфавите.**

- 0) {А, н, ю, т} встречается имя “Анюта”;
- 1) {А, л, е, ш} встречается имя “Алеша”;
- 2) {И, р, н, а} встречается имя “Ирина”;
- 3) {С, а, ш} встречается имя “Саша”;
- 4) {Д, а, я, н} встречается имя “Даяна”;
- 5) {Н, и, а} встречается имя “Нина”;
- 6) {А, н, ж, е, л} встречается имя “Ангела”;
- 7) {А, н, т, о} встречается имя “Антон”;
- 8) {С, е, р, ж, а} встречается имя “Серезжа”;
- 9) {Л, и, я} встречается имя “Лилия”.

4.2.3. С помощью совокупности четверок и диаграммы опишите работу автомата, представляющего троичный сумматор последовательного действия.

#### 4.2.4. Постройте конечный автомат таблично, складывающий:

- 0) четные натуральные числа в  $D_5$ ;
- 1) нечетные натуральные числа в  $D_8$ ;
- 2) натуральные числа в  $D_4$ ;
- 3) нечетные натуральные числа в  $D_6$ ;
- 4) четные натуральные числа в  $D_6$ ;
- 5) нечетные натуральные числа в  $D_5$ ;
- 6) четные натуральные числа в  $D_7$ ;
- 7) натуральные числа в  $D_3$ ;
- 8) четные натуральные числа в  $D_8$ ;
- 9) нечетные натуральные числа в  $D_7$

[illegible]


## Рекомендуемая литература

1. Акимов О.Е. Дискретная математика: логика, группы, графы.- М: Лаборатория Базовых Знаний, 2003
2. Гаврилов Г.П., Сапоженко А.А. Задачи и упражнения по курсу дискретной математики - М.: Наука, 2003.
3. Горбатов В.А. Фундаментальные основы дискретной математики: информатика и математика.- М: Наука. Изд.фирма «Физ.-мат.лит», 2001
4. Гульден Я., Джексон Д. "Перечислительная комбинаторика", - М.: Наука, 2004.
5. Иванов Б.Н. Дискретная математика: алгоритмы и программы. Лаборатория Базовых Знаний, 2003
6. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. – Минск: Вышэйш. школа, 2001
7. Кузнецов О.П., Адельсон-Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергоатомиздат, 2001
8. Кук Д., Бейз Г. Компьютерная математика. – М.: Наука, 2001
9. Липский В. Комбинаторика для программистов. – М.: Мир, 2004.
10. Лорьер Ж.Л. Системы искусственного интеллекта. – М.: Мир, 2001.
11. Нефедов В.Н., Осипова В.А. Курс дискретной математики. – М.: Издательство МАИ, 2002.
12. Новиков Ф. Дискретная математика для программистов. - СПб: Питер, 2000
13. Оре О. Теория графов. – М.: Наука, 2001.
14. Риордан Дж. "Введение в комбинаторный анализ", - М.: ИЛ. 2003.
15. Романовский И.В. Дискретный анализ. – СПб: Невский диалект, 2003
16. Фляйшнер Г. Эйлеровы графы и смежные вопросы – М.: Мир, 2002